2. INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN

2.2. Caracterización de la integrabilidad Riemann

Sumas de Riemann

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo, $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $P \in \mathcal{P}(R)$ una partición del rectángulo R. Se llama **suma de Riemann** de f asociada a P a cualquier expresión de la forma:

$$S\left(f, P, \{\xi_S\}\right) = \sum_{S \in P} f(\xi_S) V(S)$$

con $\xi_S \in S$, para todo $S \in P$.

Condición de Riemann

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo y $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f satisface la **condición de Riemann** en R si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

Teorema (caracterización de la integrabilidad Riemann)

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo y $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:

(i) f es integrable Riemann sobre R.

(ii) f satisface la condición de Riemann en R.

(iii) Existe $I \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ verificando que:

$$\left|S\left(f, P_\varepsilon, \{\xi_S\}\right) - I\right| < \varepsilon$$

para cualquier suma de Riemann asociada a P_ε.

Observación: El valor I en (iii) es el valor de la integral y, además, esta condición se puede escribir como que existe el límite:

$$\lim_{\delta(P) \downarrow 0} S\left(f, P, \{\xi_S\}\right) = I = \int_R f$$

Cálculo de límites mediante integrales

En el caso particular de $n = 1$ (integral 1-dimensional de Riemann), la condición (iii) del teorema de caracterización se puede utilizar para hallar límites de sucesiones. Concretamente, de esta condición se deduce que si f es integrable sobre $R = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $\{P_n\} \subset \mathcal{P}([a, b])$ con $\delta(P_n) \downarrow 0$, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} S\left(f, P_n, \{\xi_S\}\right) = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f$$

Para aplicar esto en el cálculo del límite:

$$L = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$$

se observa que se puede transformar en la suma de Riemann de una función integrable asociada a cierta partición:

$$L = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 + (1/n)^2} + \frac{1}{1 + (2/n)^2} + \ldots + \frac{1}{1 + (n/n)^2} \right) \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i/n)^2} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} S\left(\frac{1}{1 + x^2}, P_n, \left\{ \frac{i}{n} \right\} \right)$$

con $P_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1\right)$. Puesto que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es integrable sobre $[0,1]$, el límite es:

$$L = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{x=0}^{x=1} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Propiedades de la integral

Sean f y g funciones acotadas e integrables Riemann sobre el rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Usando la definición de integral y su caracterización, es fácil probar que se verifican las siguientes propiedades:

1. $\alpha f + \beta g$ es integrable Riemann sobre R y: $\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_R f + \beta \int_R g$.

2. Si $f \leq g$, es decir, si $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in R$, entonces: $\int_R f \leq \int_R g$.

3. Si m y M son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de f en R, entonces:

$$mV(R) \leq \int_R f \leq MV(R)$$

4. Si el rectángulo R se descompone en una unión finita de rectángulos de interior disjunto, es decir, $R = \bigcup_{i=1}^N R_i$ con R_i rectángulos y $\overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces:

$$\int_R f = \sum_{i=1}^N \int_{R_i} f$$

Ejercicios

1. Utiliza sumas de Riemann para calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. (a) $\ln 2$; **(b)** $2(\sqrt{2} - 1)$.